

MACIERZE STOCHASTYCZNE

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

$P = [p_{ij}]$ - **macierz prawdopodobieństw przejść** (w jednym kroku),

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

a) $p_{ij} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Uwaga.

Macierz stochastyczna i rozkład zmiennej losowej X_0 określają pewien łańcuch Markowa.

Własności macierzy stochastycznych są zatem ściśle związane z własnościami łańcuchów Markowa.

Własności macierzy stochastycznych.

Własność

Średnia arytmetyczna i iloczyn dwóch macierzy stochastycznych tego samego stopnia są także macierzami stochastycznymi.

Przykład.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Są macierzami stochastycznymi.

$$\text{Ich średnia } \begin{bmatrix} 5/12 & 1/6 & 5/12 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ jest macierzą stochastyczną}$$

Ich iloczyn $\begin{bmatrix} 5/12 & 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}$ jest macierzą stochastyczną

A - dowolna macierz kwadratowa stopnia r.

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy nazywamy wielomian

$$W(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Równanie $W(\lambda) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki tego równania to **wartości własne** lub pierwiastki charakterystyczne tej macierzy.

Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - wartości własne macierzy A o krotnościach $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \leq r$).

Wektorem własnym operatora f odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy niezerowy wektor v spełniający warunek $f(v) = \lambda v$.

Własność:

- I) suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy tzn. sumie elementów jej przekątnej.
- II) Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy zero jest jej wartością własną

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-5}{12}$.

Własności macierzy stochastycznych:

- a) Wartością własną każdej macierzy stochastycznej jest $\lambda = 1$ (oznaczamy $\lambda_1 = 1$),

Dowód.

Dodajemy wszystkie kolumny macierzy $(\lambda I - A)$ do pierwszej kolumny, sumy wierszy są równe 1 więc po dodaniu wszystkie elementy pierwszej kolumny są równe $\lambda - 1$ i można tę wartość wyłączyć przed wyznacznik.

b) Moduły wszystkich wartości własnych dowolnej macierzy stochastycznej są mniejsze od 1,

c) (tw. Dooba) istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k = A$,

Macierz A ma własność $PA = AP = A = A^2$ (macierz idempotentna),

Klasyfikacja macierzy stochastycznych.

	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 > 1$
$\bigwedge_{i \geq 1} \lambda_i \neq 1$	Regularne (tzn. nierozkładalne i niecykliczne)	rozkładalne niecykliczne
$\bigvee_{i \geq 1} \lambda_i = 1$	nierozkładalne cykliczne	rozkładalne cykliczne

Tw. Frecheta (tw. Dooba dla macierzy nierozkładalnych)

Dla każdej nierozkładalnej macierzy stochastycznej P istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k = E, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \end{bmatrix} \quad (\text{macierz ergodyczna})$$

Macierz E ma własność $PE = EP = E = E^2$ i spełnia warunki a), b) definicji macierzy stochastycznej. Elementy macierzy E możemy wyznaczyć z warunków:

$$(P - I)e^T = 0, \quad \sum_{i=1}^r e_i = 1, \quad \text{gdzie } e = (e_1, \dots, e_r)$$

Dla macierzy regularnych tw. Dooba ma postać:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest regularna to istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = E,$$

gdzie E - macierz ergodyczna.

Stochastyczne macierze regularne charakteryzuje też tzw. twierdzenie ergodyczne:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest regularna to istnieje taka jej potęga w której co najmniej jedna kolumna ma wszystkie elementy dodatnie.

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}, \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}$ więc jest macierzą regularną.

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ o krotności 2, więc jest macierzą cykliczną nierozkładalną.

Macierz ta ma własność

$$P^n = \begin{cases} P & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ P^2 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Przykład.

$$\text{Macierz } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{ma wartości własne}$$

$\lambda_1 = 1$ o krotności 3, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{12}$, więc jest macierzą niecykliczną rozkładalną.

Macierz stochastyczna rozkładalna (po ewentualnym przestawieniu wierszy i kolumn) ma bloki diagonalne, które są macierzami stochastycznymi. Wartościami własnymi macierzy P są wartości własne poszczególnych bloków. W tym przykładzie są trzy bloki diagonalne.

Przykład.

$$\text{Macierz } P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ma wartości własne}$$

$\lambda_1 = 1$ o krotności 2, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, więc jest macierzą cykliczną rozkładalną.

Macierz przywiedlna.

Macierz kwadratowa P stopnia n nazywa się **przywiedlna**, jeśli przez odpowiednie permutacje wierszy i kolumn można przekształcić P do postaci

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

gdzie B, D są kwadratowe.

W przeciwnym przypadku macierz P nazywa się **nieprzywiedlna**.

Macierz dodatnia jest nieprzywiedlna,

Jeśli macierz ma zerowy wiersz lub kolumnę zerową to jest przywiedlna.

Macierz diagonalna lub trójkątna jest przywiedlna.

Postać normalna macierzy stochastycznej.

Postać normalna macierzy stochastycznej P stopnia n to macierz

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_g & 0 \\ & R & & & S \end{bmatrix}$$

Otrzymana z P przez odpowiednie permutacje wierszy i kolumn, gdzie

T_i to macierze stochastyczne i nieprzywiedlne, $1 \leq g \leq n$, g = krotność wartości własnej 1.

S kwadratowa, niestochastyczna i nieprzywiedlna (jeśli istnieje).

Przykład.

Macierz

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $\lambda_1 = 1$ o krotności 2, $\lambda_2 = 0$ o krotności 2.

Jej postać normalna

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ma dwie macierze stochastyczne $T_1 = T_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$

Brak macierzy S i R .

Przykład.

Macierz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $\lambda_1 = 1$ o krotności 2, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0,5$. Jest to macierz rozkładalna niecykliczna.

Jej postać normalna jest taka jak P

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ma dwie macierze stochastyczne $T_1 = T_2 = [1]$,

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

ZADANIA

Zadanie 1.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Zadanie 2.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Zadanie 3.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} P^k$?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$?

Zadanie 4.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} P^k$?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$?

Zadanie 5.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Przedstaw macierz P w postaci normalnej.